数理解析研究所講究録
367巻 1979年 232-247

乱流理論と確率過程

岩手大 工　　細川 巖

1. あらまし

流体力学での乱流理論は，stochasticな流体速度etcの場の分布を特性汎函数によって表わし，Navier-Stokes方程式etcの力学に矛盾しないように特性汎函数の発展方程式を構成するのが，Hopf[1]による従来の方法であった．stochasticなものは初期条件にしか入らないので，これは確率過程というよりも，力学過程のアンサンブルを記述するに過ぎないわけである．特に非粘性流の時には方程式は可逆になる[2]．そこで，この不満を除くために，小さいrandomな外力を入れて理論の再構成を考える[3]．N-S方程式に対して熱揺動のゆらぎの項を入れるのも一つの方法である[4]．すると特性汎函数方程式はFokker-Planck方程式と等価なものになり，確率過程を表わすものとなり，従って乱流のevolutionの非可逆性を保証することができる．

然し，randomな外力は乱流定常解に対してどの程度に敏感な影響を与えるだろうか．randomな外力は少なくとも時間的にwhite noiseであって，これが小さい限り，乱流定常解の型にglobalな影響を与えないだろうと著者は考えている．このことについて，Burgers modelの方程式を例にとって議論したい．

上記の基礎方程式は多次元のFokker - Planck方程式なのであるから，通常の仕方によってpath - integralで一般解を表現することができる．乱流の場合，各自由度の相互作用は非常に強いので，解析的に径路積分を操作して近似解に導くことは簡単ではない．この積分解をモンテカルロ法で遂行するのも一方法である[5]．これは，Itoの式によって与えられるrandom pathsのアンサンブルを追跡することと全く同じである．

話のついでに，非平衡統計力学のモデルとして，筆者はFunctional Random - Walk Model (F. R. M)[6]を提唱したが，この基礎式もFokker - Planck型になるので，本講演では時間の都合で省略したけれども，これに対応するrandom pathsを与えておく．

2. Hopf方程式とFokker - Planck方程式

(3次元) 非圧縮流体の (3次元) 速度場$u(x)$に対するNavier-

Stokes方程式は

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = \chi_\alpha(u), \qquad \alpha = 1, 2, 3 \tag{1}$$

と書ける．χはNavier - Stokes operator（非線型）と呼び，圧力項は，非圧縮性条件

$$\mathrm{div}\ u = 0 \tag{2}$$

によって消去してある．流れを特定化するのに，更に境界及び，uの境界条件等を指定しなければならないが，ここでは，等方性乱流を頭において，単に$u(x)$はFourier変換可能な場と考えておいて十分である．(1) - (2)は，明かに速度場$u(x)$の非線型力学を規定する．

このような力学に従う多くの$u(x)$のアンサンブルを取り扱うために当然，確率の概念が導入されるが，Hopfはこれを特性汎函数$\phi(u, t)$で取扱い，次のような方程式を確立した．

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = i \int y_\alpha(x)\, \chi_\alpha\left[\frac{\delta}{i\delta y(x)}\right] \phi \, dx \tag{3}$$

αはsummation conventionに従い，$\delta/\delta y(x)$はHopfの導入した汎函数微分である.[1] ここで，

$$\left.\begin{aligned} &\phi(0, t) = 1 \\ &\phi^*(y, t) = \phi(-y, t) \\ &|\phi(y, t)| \leq 1 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

は特性汎函数の条件であり，又(2)より

$$\operatorname{div}\frac{\delta\phi}{i\delta y(x)}=0 \tag{5}$$

であることが必要である．

ϕの汎函数微分又は汎函数Taylor展開によって凡てのuの相関が計算できるので，(3)が(1)から作られる無限の相関方程式系と等価であることは明かである．従って，ϕは乱流現象の凡てを厳密に表現しているものと信じられて来たわけである．然しながら，(1)により明かな通り，力学そのものにはrandomnessがないので，ϕのもっている統計性は全く初期条件のもっている統計性に基づくものであり，丁度，統計力学の(粗視化しない)Liouville方程式と似たような状況にあり，ϕのevolutionは，いわゆる確率過程にはなっていないのである．これによって特に問題となるのは，大抵の初期条件から出発して$t\to\infty$において(3)が安定な定常解への漸近を与えるであろうかという点である．なるほど，Hopfは非粘性の時に，(3)の一つの定常解(Gauss型)を発見した[1]．所が，非粘性の時には(3)は時間について可逆であることが分っている[2]．そうなると，到底，Hopfの定常解の漸近安定性はいえないことになる．これは，非粘性の場合，(3)に関連した情報エントロピーが全く増減しないという事実[3,7]と大いに関係がある．この事情はき

さに，Liouville方程式のもっている特質と同じである．後者の場合，何らかの粗視化(coarse-graining)によってこのヂレンマから脱け出すことになる．従って，われわれの場合も又，乱流運動の粗視化を考える必要性は，何らかの形において生じてくると思われる．が，ここでは，小さいrandomな外力を導入することによって，力学過程を確率過程に変更し，これによって粘性があろうとなかろうと，定常解の存在とその漸近安定性を保証することを述べたい．

先ず，(1)を

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = \chi_\alpha(u) + f_\alpha \qquad (6)$$

と変更し，Langevin方程式と同様に，randomな外力f_αはwhite noiseでGaussianと仮定する．(2)の条件と矛盾しないために

$$\mathrm{div}\ f = 0 \qquad (7)$$

が必要である．実際には，fは人工的なものであってもよいし，又Navier-Stokes方程式の中で無視されているが，実在する筈の熱揺動の力と考えてもよい．又，われわれの計算機の中で，決定論方程式を解いている筈にも拘らず，必然的に入ってくるround-offの誤差も亦，このfに似た作用をすることも注意したい．

このような変更の結果，特性汎函数方程式は

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}=i\int y_\alpha(x)\chi_\alpha\left[\frac{\delta}{i\delta y(x)}\right]\phi\,dx-\frac{1}{2}\int y_\alpha(x)y_\beta(x)F_{\alpha\beta}(x,x',t)\,dx\,dx'\phi \quad (8)$$

となる.[8] ここに, $\langle f_\alpha(x,t)f_\beta(x',t')\rangle=\delta(t-t')F_{\alpha\beta}(x,x',t)$ (9)
で, もし, 定常で, homogeneous な場なら

$$F_{\alpha\beta}(x,x',t)=F_{\alpha\beta}(x-x') \quad (10)$$

となる. $\langle\ \rangle$はアンサンブル平均を示す. non-Gaussian の場合の一般化は Ref. 8 を参照されたい.

ここで, 速度場 $u(x)$ の自由度をしばらく(十分大きいが)有限に打ち切り, $\phi(y)$ の Fourier 逆変換 $p(u)$ を議論しよう. こうすると, (8)は

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\int\frac{\delta}{\delta u_\alpha(x)}\left\{\chi_\alpha[u(x)]p\right\}dx+\frac{1}{2}\iint\frac{\delta^2}{\delta u_\alpha(x)\delta u_\beta(x')}\left[F_{\alpha\beta}(x,x')p\right]dx\,dx' \quad (11)^3$$

となって, まさに特性函数 ϕ に対応する確率密度函数 p の方程式が Fokker - Planck 方程式であることが判然とする. (9)によって $F_{\alpha\beta}$ は positive definite, 従って, (11)が時間的に非可逆になるのは当然であり, 又(11)が一般に漸近安定の一意の解をもつことは, よく知られている. もし, (11)の第 2 項がない場合は丁度, Hopf 方程式(3)に対応する確率密度方程式になるが, これは, 一階偏微分方程式であるから, Lagrange の方法で分るように, 一般に凡ての解は特性曲線を通して初期条件に依存する筈であり, 解は永久に非定常であるという場合

もあるだろう.（勿論，安定な唯一つの定常流 $u_\alpha(x)$ が存在する場合は，測度 $p\delta u$ は，$t\to\infty$ で，ここに集中することは明かである.）

3. 熱揺動の外力[3]

(7)を充す熱揺動の外力の場合，$F_{\alpha\beta}$ はどうあるべきかを導くことができる．(8)を波数空間の中の函数 $z(k)$ の特性汎函数として書き直して，

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=i\int z_\alpha^*(k)\chi_\alpha\left[\frac{\delta}{i\delta z^*(k)}\right]\psi\, dk-\frac{1}{2}\iint z_\alpha^*(k)z_\beta(k')F_{\alpha\beta}(k,k')\psi\, dk\, dk' \quad (12)$$

$$\chi_\alpha(v)=-ik_\gamma\left(\delta_{\alpha\beta}-\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right)\int v_\beta(k-k')v_\gamma(k')dk'-\nu k^2 v_\alpha(k) \quad (13)$$

とする．ν は運動粘性係数．reality condition により $z^*(k)=z(-k)$．今，流体が静止に近く，従って，χ_α は線型と考えてよいとして，ψ の定常解 ψ_∞ を求める．先ず，

$$-\nu k^2\frac{\delta\psi_\infty}{\delta z_\alpha^*(k)}-\frac{1}{2}\int z_\beta(k')F_{\alpha\beta}(k,k')\psi_\infty dk'=0 \quad (14)$$

で，f の solenoidality (7)と，波数独立を考えると，

$$F_{\alpha\beta}(k,k')=\delta(k-k')\left(\delta_{\alpha\beta}-\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right)B(k) \quad (15)$$

である必要がある．この結果，

$$\Psi_\infty = \exp\left[-\frac{1}{2}\int z_\alpha^*(k) z_\beta(k)\left(\delta_{\alpha\beta}-\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right)B(k)\Big/(2\nu k^2)\,dk\right] \tag{16}$$

従って

$$\langle v_\alpha(k) v_\beta^*(k')\rangle \equiv \left.\frac{\delta^2\psi}{i^2\delta z_\alpha^*(k)\delta z_\beta(k')}\right|_{z=0} = \frac{\delta(k-k')}{2\nu k^2}\left(\delta_{\alpha\beta}-\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right)B(k) \tag{17}$$

が得られる．これは，われわれの流体のfluctuation-dissipation theoremに他ならない．

(17)から，流体運動の単位質量当りのエネルギー分布をE(k)とすると，

$$E(k)=\frac{1}{2}B(k)\Big/\nu k^2 \tag{18}$$

が得られるが，ここでEinsteinと同様に，エネルギーの等分配を仮定すると，

$$\rho L^3 E(k)\Delta k = \kappa T \tag{19}$$

（ρは流体の質量密度，κはBoltzmann定数．一つの波は，Solenoidalityのために，自由度2をもっていることに注意．）

$L\to\infty$において，$L^3\Delta k\to(2\pi)^3$であることを考慮すると，(18)-(19)により，

$$B(k)=\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2\kappa T}{\rho}\nu k^2 \tag{20}$$

が得られる．(15)と(20)が熱揺動に基く$F_{\alpha\beta}$を決めることになるが，これを物理空間の中で表現し直すと，

$$F_{\alpha\beta}(x-x') = 2\frac{\kappa T\nu}{\rho}\left(\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\gamma \partial x'_\gamma} - \frac{\partial^2}{\partial x_\beta \partial x'_\alpha}\right)\delta(x-x') \tag{21}$$

と書ける．

これをLandau-Lifshitz, Fox-Uhlenbeck, Kelly-Lewisの表現：

$$F_{\alpha\beta}(x-x') = 2\frac{\kappa T}{\rho}\left[\nu\left(\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\gamma \partial x'_\gamma} + \frac{\partial^2}{\partial x_\beta \partial x'_\alpha}\right) + \left(\zeta - \frac{2}{3}\nu\right)\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x'_\beta}\right]\delta(x-x') \tag{22}$$

（ζは第２粘性係数）と比べると，かなり簡単化されていることに気付かれる．物理的には，(22)の方が正しいが，(7)の条件は充せない．つまり，流体力学者にとって一寸驚くべきことであるが，熱揺動が考慮された場合は実は非圧縮性(solenoidal)の流れはあり得ないのである．それを，あるとして，solenoidalなゆらぎを考えるとすれば，(21)のような形ができ上るのである．solenoidalな乱流を考える限り，然し，(21)は勿論有用である．（$\nu=0$の時，$F_{\alpha\beta}=0$となる．従って，非粘性で非可逆性をいうには，別の外力を導入しなければならない．）

4. randomな外力の役割

Fokker-Planck方程式(11)又は，それと等価の特性汎函数方程式(8)は，漸近安定な定常解をもつ筈であるが，それが外力の相関Fにどの程度にsensitiveであるかは興味がある．わ

われわれは(6)で非常に小さいfを考えているのであるから，Fも亦これらの式において非常に小さい．従って，(11)の第2項は一つのsingular perturbationの問題を提起する．

仮に$F=0$に対して(11)の定常解p_0があるとしよう．$F\neq 0$の本当の定常解との間には，第2項に相当する量がくい違いとして現れる筈であるが，もしP_0の変化が$u(x)$の全空間でsharpでなければ第2項は無視できて，P_0を本当の定常解とほぼ同等に扱うことは可能であろう．然し，localにsharpな部分があれば，そこでは，大きな修正を被るに相異ない．

例として，最も簡単なBrown運動を考えよう．この時

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\gamma\frac{\partial}{\partial x}(xp)+\frac{1}{2}D\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\ ,\qquad \gamma,\ D:\mathrm{const} \tag{23}$$

$D=0$なら$P_0=\delta(x)$であるが，これは余りに$x=0$でsharpであるために，修正された解は，Dに依存する部分が大きくなり，実際Gauss分布になるわけである．

実際の発達した乱流では，$P_0(u)$は(多重)Gauss分布に近いことが知られている．(例えばRef. 14)．従って，この場合は余りsharpとはいえないから，Fによる修正はglobalには無視できるものと思われる．但し，$P_0(u)$は安定であり一意的であることを前提した．Fの役割は，この場合，乱流の発生及びevolutionの非可逆的な進行を保証することである．

然し，$P_0(u)$がもし不安定であったり一意的でなかったりすれば，結果は異なる．Fokker - Planck方程式の定常解$P(u)$は一つであるから結局，これらの$P_0(u)$を滑かな形でsuperposeしたものになることが期待される．勿論，不安定なものに強いweightがかかるとは考えられない．それぞれのp_0のweightがどうなるかは，解を解かなければ分らない．一次元Būgers modelの例[5]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u - u\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u=0 \quad \text{for} \quad x=0, 1 \tag{24}$$

では，$u_{1,2} \cong x,\ 1+x$ for $\nu \sim 0$ という二つの安定な解があり，従って，$p_0(u) = \delta(u-u_1),\ \delta(u-u_2)$ という二つの定常解があるが，weightは，モンテカルロ法の結果，1：1であることを示した．(位相空間の中に二つのattractorがある場合に，いつでもこうなるとは限らない.) 結果は，sharpnessのために，Fに依存する度合が大きいと期待されるが，$\int_0^1 \langle u^2 \rangle dx$ というglobalな量(乱流エネルギー期待値)などは余り変らないという興味あることが分った．

5. Path Integralとモンテカルロ法

(11)のような多次元偏微分方程式を解く形式的方法として，propagation kernelの方法がある．例えば一次元のFokker -

Planck方程式：

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}[a(x)p]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[b(x)p],\qquad b(x)>0 \tag{25}$$

の場合，解を

$$p(x,t)=\int K(x,t/x^\circ,t^\circ)\,p(x^\circ,t^\circ)\,dx^\circ \tag{26}$$

$$K(x,t/x^\circ,t^\circ)=\lim_{\Delta t\to 0}\int\cdots\int\prod_{m=1}^{M}\{e^{-\frac{1}{2}[x^m-x^{m-1}+a(x^{m-1})\Delta t]^2/b(x^{m-1})\Delta t}/[2\pi\Delta t\, b(x^{m-1})]^{\frac{1}{2}}\prod_{m=1}^{M-1}dx^m \tag{27}$$

と書くことができる．ここに $x=x^M$，$M\Delta t=t-t^\circ$．Feynmanの積分に習って，これを

$$K(x,t/x^\circ,t^\circ)=\int_{x(t^\circ)=x^\circ}^{x(t)=x}e^{-\frac{1}{2}\int_{t^\circ}^{t}\{[\dot{x}+a(x)]^2/b(x)\}dt}\,\mathcal{D}x(t)/b[x(t)]^{\frac{1}{2}} \tag{28}$$

と表現することは，甚だ尤もらしい．然し，実際は(27)→(28)の移行は無条件に正しくなく，Horsthemke & Bach[9]によれば，

$$\{\quad\}\to[\dot{x}+(a(x)+\frac{1}{4}\frac{\partial b}{\partial x})]^2/b(x)-b^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x}\{[a(x)+\frac{1}{4}\frac{\partial b}{\partial x}]/b^{\frac{1}{2}}\} \tag{29}$$

とするのが本当のようである．(いわゆるOnsager - Machlup Lagrangian)．多変数のFokker - Planck方程式についても，同様の移行がGraham[10]によって与えられ，それを使って，path-integralによる解表現を作ることができる．いくつかのpath-integralは解析が可能であるが，一般にはこれによって$p(x,t)$の解を計算することは困難であって摂動論などによる近似解析を行うほかはない．[(29)によるpath integralを使って完

全に解析できるものに例えば,

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(Axp)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(Bx^2p) \quad , \qquad A, B: \text{const}$$

などがある.]

そこで,Kの入った積分表現をcomputerで直接計算することを考えてみよう.積分は(無限に)多重であるから,モンテカルロ法しか適用できない.この時は(27)の表現が,既に拡張されたWiener測度になっているので,(Dekker[11]はこれをPath-sumと呼んでいる.)このままの形でimportance samplingを行うのが有効である.標準正規乱数λを使えば,$\Delta t(=t^m-t^{m-1})$時間の$x(t)$のsample pathは

$$\Delta x(=x^m-x^{m-1})=-a(x^{m-1})\Delta t+\lambda\left[\Delta t\, b(x^{m-1})\right]^{1/2} \tag{30}$$

と書ける.$\lambda(\Delta t)^{1/2}=\Delta B$とおけば,$x(t)$は$\Delta t\to 0$に於いてItoの確率積分になっている.$x(t)$のsampleを沢山作って平均を取れば,$F(x)$のtに於ける期待値$\langle F(x)\rangle_t=\int F(x)p(x,t)\,dx$は計算できる.

複雑なFokker - Planck方程式(11)でも全く同じ取扱いができ,速度空間の中のsample pathとして,

$$\Delta u_\alpha(x)(\equiv u_\alpha^m(x)-u_\alpha^{m-1}(x))=\chi_\alpha[u^{m-1}(x)]\Delta t+\lambda(x)[\Delta t\, D_\alpha(x)]^{1/2} \tag{31}$$

が得られる.但し,$F_{\alpha\beta}(x,x')=\delta_{\alpha\beta}\delta(x-x')D_\alpha(x)$(これはsummation conventionに従わない.)とおいた.$\lambda(x)$は標準正規ra ndom fieldである.[12] この方法で，1次元Burgers modelを取扱い，sample数200で，十分よい結果が得られている.[5]

6. Functional Random-Walk Model

Liouville方程式から導かれる，いわゆるBBGKY Hierarchyは，Bogoliubov - Hosokawaの汎函数方程式で書き直すことができ，これが，形式的に(8)と酷似していることから，(11)の形の基礎式を作り出したものが，いわゆるF.R.Mである．詳細についてはRef.6に譲る．この際，$u_\alpha(x)$の物理的意味は，例えばm種類の粒子を含む多体系を考える時には，$\alpha=1,2,\cdots m$となり，各粒子の平均密度を$n_\alpha(=\lim_{V\to\infty} N_\alpha/V)$とする時，$n_\alpha u_\alpha$(sumは取らない.)は，1体の位相空間($\mu$-space)の中の夫々の局所的粒子密度を与えるものとなる．いわば，このモデルでは粒子の雲を確率的に追跡していることになる.

この場合，系のエネルギー保存の条件から，$u_\alpha(x)$の空間はnon - Euclideanとなるが，Δt時間では局所Euclid空間を考えることにより，(27)とほぼ同じ形のpropagatorを作ることができる．従って，$\Delta t\to 0$では$u_\alpha(x)$のpathは指定されたRiemann空間Bの中を通ることになる．少し複雑であるが，(31)に対応する式を書くと，

$\Delta u_\alpha(x) =$ Projection on B of

$$\left(\chi_\alpha[\overset{m-1}{u}(x)]\Delta t + r(x)\left[\Delta t\int T_{\alpha\beta}(x,x')\tilde{D}^{(m-1)}_{\beta}(x')dx'\right]^{1/2}\right) \quad (32)$$

ここで，χ_αはVlasov operator（即ち$\partial f_\alpha/\partial t=\chi_\alpha(f)$がVlasov方程式になる．）$T_{\alpha\beta}(x)$は$F^{(m-1)}_{\alpha\beta}(x,x')$を次のように対角化するための変換マトリックス函数である．

$$\iint T_{\lambda\alpha}(x_1,x)F^{(m-1)}_{\lambda\mu}(x_1,x_2)T_{\mu\beta}(x,x')dx_1dx_2=\delta_{\alpha\beta}\delta(x-x')\tilde{D}^{(m-1)}_{\alpha}(x) \quad (33)$$

右辺はsumを取らない．この場合，

$$F^{(m-1)}_{\alpha\beta}(x,x')\equiv\rho[\phi_{\alpha\beta}(x,x');\overset{m-1}{u_\alpha}(x)\overset{m-1}{u_\beta}(x')] \quad (34)$$

で，$\phi_{\alpha\beta}$はα種の粒子とβ種の粒子の相互作用potential，[;]はPoisson bracket，ρは[ ]の対称マトリックス函数をpositive definiteにするoperatorで，この右辺もsumは取らない．（ρは一種のcoarse-grainingの作用をする.[6]）Vlasov operator χは，全エネルギーを保存することが知られているから[13]，(32)で，$\chi_\alpha[\overset{m-1}{u}(x)]\Delta t$はProjection on B of のbracketの外に出すことができる．

この方法で，何かの数値的結果を出すことは今後の課題である．

参考文献

1. E. Hopf, J. Rat. Mech. Anal. 1 (1952), 87.

2. I. Hosokawa, Prog. Theor. Phys. 53 (1975), 1517.

3. I. Hosokawa, J. Stat. Phys. 15 (1976), 87.

4. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Fluid Mechanics (Pergamon, New York, 1959), Chap. 17; R. F. Fox and G. E. Uhlenbeck, Phys. Fluids 13 (1970), 1893; G. E. Kelly and M. B. Lewis, Phys. Fluids 14 (1971), 1925.

5. I. Hosokawa and K. Yamamoto, J. Stat. Phys. 13 (1975), 245.

6. I. Hosokawa, J. Math. Phys. 11 (1970), 657; Prog. Theor. Phys. 52 (1974), 1513; in Path Integrals, ed. G. S. Papadopoulos and J. T. Devreese (Plenum, 1978), p.455.

7. T. Tatsumi and N. Ikeda, Inst. Space-Aero. Sci., Univ. Tokyo, Rep. 2 (1966), A-73.

8. I. Hosokawa, J. Phys. Soc. Japan 25 (1968), 271.

9. W. Horsthemke and A. Bach, Z. Physik B22 (1975), 189.

10. R. Graham, Z. Physik B26 (1977), 281.

11. H. Dekker, Physica A85 (1976), 363 and 598.

12. N. Wiener, Nonlinear Problems in Random Theory (Technology Press, Cambridge, Massachussetts, and John Wiley & Sons, 1958).

13. A. A. Vlasov, Many-Particle Theory (Moscow-Leningrad, 1950, trans. AEC-tr-3406, Washington, D. C., 1959), Chap. 2, Part I.

14. G. K. Batchelor, Homogeneous Turbulence (Cambridge Univ. Press, 1960), Chap. 8.